Economic Bulletin of Senshu University
Vol.44, No.2, 39-58., 2009

債務不履行危険下における最適ポートフォリオ・財務決定*

中島 巌

序

不確定性下の意思決定に関する伝統的モデルは，債務不履行（default）の可能性を予め捨象したゼロ債務不履行連続モデル（no default continuous model）であった。しかるに，債務不履行は不連続性（discontinuity）ないしジャンプ（jump）をともなう現象として伝統モデルの前に立開かった。（連続モデルの当否をめぐる史的展開に関する興味深い展望として，Merton [15] 参照。）

債務不履行危険（default risk）を取込む形での理論的展開は，条件付請求権理論（contingent claims theory）の発展と不可分である。Merton [13] は，利子率の危険構造（risk structure）を，Black＝Scholes [2] は，オプション価格づけ（option pricing）を条件付請求権理論の枠組の中に位置づけて論じた嚆矢である。

債務不履行は，消費・ポートフォリオに関する意思決定の主体である消費者・投資家に不連続な所得逸失をもたらし，したがって，その所得制約式にジャンプをもたらす。かかる不都合を計算可能な債務不履行危険の形に還元し直すことを可能にする手続の1つが拡散過程とジャンプをともなうPoisson過程とを結合させた統合過程を適用することである。（かかる過程は，Cootner [4] によって導入された。）

他方，生産決定，財務決定に関する意思決定の主体である生産企業に対して，債務不履行は破産（bankruptcy）の主因となる。不確定性が作用するときも，生産企業の生産決定と財務決定は逐次性をもち，先行する意思決定の結果を所与として，次の意思決定を独立に行ない得る。しかも，そこでの最適な財務決定が端点解（corner solution）となり，全額負債調達（all-debt financing）か全額自己資本調達（all-equity financing）かの択一的選択を促す確定性下におけると同一の結論がしたがう。

しかるに，債務不履行にともなう破産の危険性に直面する企業の財務決定は，上と些か様相を異にする。債務不履行の可能性をもつ危険社債の発行に際し，利子支払い分を新規株式発行で賄うという選択が現実味を増す。そこでの株式発行は，破産危険の株主への移転の性質を帯びてくる。

＊）本稿では，昨今の債務不履行にともなう金融危機は，視野の外に置かれていることに注意されたい。

本稿における我々の目的は，債務不履行危険が支配する情況下での消費者･投資家と生産企業の意思決定のあり方をみることにある。

まず，次節では，消費者･投資家の消費･ポートフォリオ決定のあり方をみる。債務不履行危険が存在しない情況下での一般的な最適消費･ポートフォリオ･ルールを確認した後，株式，安全社債，そして債務不履行危険をもつ危険社債の3種類の証券が存在する経済環境において，危険社債価格が拡散過程とジャンプをともなうPoisson過程が結合された統合過程にしたがって変動する仮定の下でしたがう最適消費･ポートフォリオ･ルールのあり方をみる。

第2節では，まず，債務不履行からしたがう破産の危険性が存在しない情況下で，企業の生産決定と財務決定の独立性を確かめた後，企業の最適財務決定が端点解をとり，全額負債調達か全額自己資本調達かの択一的選択の形をとる過程を確かめる。次いで，危険社債による負債調達の中で，利子支払い分を新規株式発行で賄う形の財務決定からしたがう危険社債，株式の市場価値が顕示される過程をみる。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第1節　最適消費･ポートフォリオ

1. 不確定債券価格と消費･ポートフォリオ決定

本節では，債務不履行の可能性をもつ債券としての危険社債（risky bond）を含めた複数種の金融資産が取引される完全市場が存在するところでの消費者･投資家の最適消費･ポートフォリオ･ルールのあり方をみる。

本項では，予備的考察として，債務不履行危険が存在しないところでの消費者･投資家の予算方程式（budget equation）と最適消費･ポートフォリオのあり方をみる[1)]。

さて，有限責任（limited liability）タイプの n 種類の資産が，完全市場において取引費用ゼロで連続的に取引されるものとする。このとき，資産価格 $\{P_i(t)\}$ は，確率過程

$$\frac{dP_i}{P}=\alpha_i(P,t)\,dt+\sigma_i(P,t)\,dZ_i \tag{1}$$

にしたがって変動するものとする。ただし，P は資産価格のベクトルで，α_i は単位時間当たりの瞬時的価格変化分の期待値，そして，σ_i^2 は瞬時的分散であり，さらに，dZ_i はWiener過程（Wiener process）の増分である。さらに，$E(dZ_i)=0$, $\mathrm{Var}(dZ_i)=1$，かつ $E(dZ_i\,dZ_j)=\rho_{ij}$ がしたがう。ただし，ρ_{ij} はWiener過程 dZ_i と dZ_j の間の瞬時的相関係数（instantaneous correlation coefficient）である。

ところで，上の確率過程において，すべての資産価格に対して幾何Brown運動仮説（geometric Brownian motion hypothesis）の妥当するところで，α_i, σ_i（$i=1,\cdots\cdots,n$）は定数となり，価格は定常対数線型分布（stationary and lognormal distribution）にしたがうことになる。以下では，幾何Brown運動仮説が妥当するものとする。

さて，消費者･投資家のすべての所得がキャピタル･ゲイン（capital gain）のみから成るものと

しよう[2]。いま，連続モデルを導くに先立って期間モデルを想定する。消費者･投資家（以下，単に「消費者」と呼ぶ。）は，前期間に決定した資産購入量，すなわち，ポートフォリオ$\{N_i(t-h)\}$をもってt期の期首に市場に参加するものとする。このとき，資産価格$P_i(t)$が既知であれば，消費者の予算額は

$$W(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t-h)\,P_i(t) \tag{2}$$

で与えられる。t期における新規のポートフォリオ決定$\{N_i(t)\}$と消費決定$C(t)$は，上の制約式((2)式)にしたがわなければならず，新たな予算方程式

$$W(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\,P_i(t)+C(t)h \tag{3}$$

がしたがう。(図-**1**参照。) ここで，(2),(3)式から$W(t)$を消去すれば

$$-C(t)h=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t)-N_i(t-h)]P_i(t) \tag{4}$$

がしたがう。さらに，(4),(2)式をh期間先送りすれば

$$\begin{aligned}-C(t+h)h&=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)]P_i(t+h)\\&=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)][P_i(t+h)-P_i(t)]\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+h)-N_i(t)]P_i(t)\end{aligned} \tag{5}$$

$$W(t+h)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)P_i(t+h) \tag{6}$$

を得る。いま，$h\to0$として極限値をとれば，(5),(6)式はそれぞれ連続型のそれ

$$-C(t)=\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)dP_i(t)+\sum_{i=1}^{n}dN_i(t)P_i(t) \tag{7}$$

$$W(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)P_i(t) \tag{8}$$

を得る。

さて，(8)式に伊藤補題（Itō Lemma）を適用すれば

$$dW=\sum_{i=1}^{n}N_i\,dP_i+\sum_{i=1}^{n}dN_iP_i+\sum_{i=1}^{n}dN_i\,dP_i \tag{9}$$

を得る。ここで，上の(7)式を想起すれば，(9)式は

$$dW=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)dP_i-C(t)dt \tag{10}$$

と変形される。さらに，予算額に占める資産iへの投資割合$w_i(t)=N_i(t)P_i(t)/W(t)$を定義し，幾何Brown運動

$$\frac{dP_i}{P_i}=\alpha_i\,dt+\sigma_i\,dZ_i \tag{11}$$

を考慮すれば，(10)式は

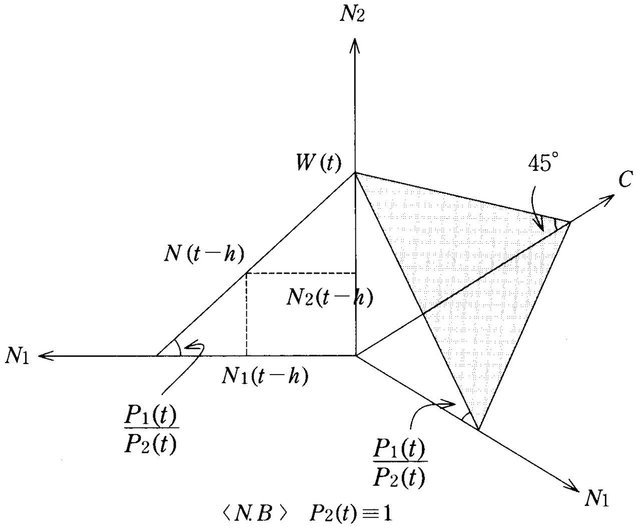

図-1

$$dW=\sum_{i=1}^{n} w_i W\alpha_i dt - Cdt + \sum_{i=1}^{n} w_i W\sigma_i dZ_i \tag{12}$$

と書き改められる。ただし，$\sum_{i=1}^{n} w_i=1$である。

もし，第n資産が安全資産（risk-free asset）であれば$\sigma_n=0$となり，また，瞬時的収益率α_nは，安全利子率（risk-free rate of interest）rに符合する。すなわち，$\alpha_n=r$がしたがうから，(12)式は，$m=n-1$に対して

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^{m} w_i W\alpha_i dt + w_n Wr dt - Cdt + \sum_{i=1}^{m} w_i W\sigma_i dZ_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} w_i W\alpha_i dt + r(1-\sum_{i=1}^{m} w_i)Wdt - Cdt + \sum_{i=1}^{m} w_i W\sigma_i dZ_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} w_i(\alpha_i - r)Wdt + (rW-C)dt + \sum_{i=1}^{m} w_i W\sigma_i dZ_i \end{aligned} \tag{13}$$

と変形される。

さて，消費者は，T期間の寿命をもち，生涯効用の最大化を図るものとする。ここで，確率動的計画法（stochastic dynamic programming）を適用しよう。まず，最適状態評価函数（optimal value function）

$$J(W, P, t)=\max_{C,w} E_t\left[\int_t^T U(C, s)\,ds + B(W(T), T)\right] \tag{14}$$

が定義される。ただし，E_tは，$W(t)=W, P_i(t)=P_i$に条件付きの期待値オペレータである。また，$B(W(T), T)$は境界制約であり，遺贈函数（bequest function）に相当する。しかるに，生涯効用函数Uが$U'(C)>0$，$U''(C)<0$，遺贈函数Bが$B'(W)>0$，$B''(W)<0$となる凹性を満たすときに，$\sum_{i=1}^{n} W_i=1$，$J(W, P, T)=B(W, T)$を満たす組（C^*, w^*）が存在することが確かめられている[3]。

いま，(14)式の問題を分割すれば

$$J(W, P, t)=\max_{C,w} E_t\left[\int_t^T U(C(s), s)\,ds\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{C,w} E_t\Big[\int_t^{t+\Delta t} U(C(s), s)ds\Big] \\
&\quad + \max_{C,w} E_t\Big[\int_{t+\Delta t}^{T} U(C(s), s)ds\Big] \\
&= \max_{C,w} E_t\Big[\int_t^{t+\Delta t} U(C(s), s)ds + J(W, P, t+\Delta t)\Big] \\
&= \max_{C,w} \{U(C(t), t)\Delta t + E_t[J(W(t+\Delta t), P(t+\Delta t), t+\Delta t)]\} \\
&= \max_{C,w} \{U(C(t), t)\Delta t + J(W, P, t) + E_t dJ\} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

を得る。(15)式の両辺から $J(W, P, t)$を減じ，Δt で除し，その極限を dt で表わせば

$$0 = \max_{C,w} \{U(C(t), t) + \frac{1}{dt}E_t dJ\} \qquad (16)$$

がしたがう。(16)式は，Bellman 方程式（Bellman equation）と呼ばれる。

しかるに，上の dJ を展開し，(13)式を考慮すれば

$$
\begin{aligned}
dJ = {}&\frac{\partial J}{\partial t} + \Big[\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i W - C\Big]\frac{\partial J}{\partial W} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i \frac{\partial J}{\partial P_i} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i P_j \sigma_{ij} \frac{\partial^2 J}{\partial P_i \partial P_j} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i w_j W \sigma_{ij} \frac{\partial^2 J}{\partial P_i \partial W} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

がしたがう。ただし，$\sigma_{ij} = \rho_{ij} P_i P_j$ である。

さて，(16)式を C, w に関して最大化するために Lagrange 函数

$$\Phi = U(C(t), t) + \frac{1}{dt}E_t dJ + \lambda\Big[1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\Big] \qquad (18)$$

を定義すれば，C, w そしてλに関するそれぞれの 1 階条件

$$U_C(C, t) - J_w = 0 \qquad (19)$$

$$W^2 J_{WW} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} w_j - \lambda + W\alpha_k J_W + W\sum_{j=1}^{n} P_j \sigma_{kj} J_{jW} = 0 \qquad k = 1, \ldots\ldots, n. \qquad (20)$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \qquad (21)$$

がしたがう。ただし，$J_W = \partial J/\partial W$，$J_{jW} \equiv \partial^2 J/\partial P_j \partial W$ である。(19)－(21)式が構成する均衡体系は，J の偏微分係数を含み，(C^*, w^*)を得るためには偏微分方程式を解かなければならない[4)]。

以上の準備の下で，次項では，安全社債，株式に加えて，債務不履行の危険をもつ危険社債の 3 種類の資産が存在するところでの最適消費・ポートフォリオ・ルールのあり方をみてみよう。

2. 債務不履行危険と消費・ポートフォリオ決定

本項では，安全社債（risk-free bond）に加えて，普通株（common stock）と無償還社債（defaulted bond）となる危険，すなわち債務不履行危険をもつ危険社債（risky bond）の3種類の資産が取引される経済における消費者の最適消費・ポートフォリオのあり方をみる。

まず，普通株の市場価格は，対数正規分布にしたがって変動する，すなわち株価$S(t)$は確率過程

$$\frac{dS}{S}=\alpha_S dt+\sigma_S dZ_S \tag{22}$$

にしたがうものとする。ただし，α_Sは瞬時的価格変化率の期待値であり，σ_S^2は瞬時的分散，dZ_SはWiener過程の増分である。このとき，$F(S)=\log S$とすると

$$dF(S)=d\log S=\left(\alpha_S-\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)dt+\sigma_S dZ_S \tag{23}$$

がしたがう。すなわち，価格Sの対数の変化が期待値$(\alpha_S-\frac{1}{2}\sigma_S^2)t$，分散$\sigma_S^2 t$をもつ正規分布にしたがい，このとき，時点$t=0$において，$S(0)=S_0$と設定すると$S(t)$の期待値，分散が，それぞれ

$$E[S(t)]=S_0 e^{\alpha_S t} \tag{24}$$

$$\mathrm{Var}[S(t)]=S_0^2 e^{2\alpha_S t}(e^{\alpha_S^2 t}-1) \tag{25}$$

で与えられる。ここで，割引率ρの下でのある期間にわたる価格$S(t)$の割引現在価値の期待値は，$\rho>d_S$が満たされるところで

$$E\left[\int_0^\infty S(t)e^{-\rho t}dt\right]=\int_0^\infty S_0 e^{-(\rho-\alpha_S)t}dt=\frac{S_0}{\rho-\alpha_S} \tag{26}$$

となる[5)]。

次に，償還不能の危険性をもつ危険社債の価格変動を特定化しよう。

上の株価変動に適用された確率過程は，全域にわたって連続となる拡散過程（diffusion process）に限定されていた。しかるに，確率変数によっては稀ながら離散的なジャンプ（jump）をともなう過程としてモデル化を図る方が，より現実妥当性が高い場合がある。例えば，新規競争者の市場への参入が既存の企業の生産的価格を急落させる場合，また，競争者の新案特許開発の成功が既存の特許価格を急落させる場合，さらに，戦争，革命，テロリズムの勃発や鎮静化が原油価格を急落させる場合などは，よく知られた事例である。

かかる不連続なジャンプを含む過程として，Poisson過程（Poisson process）が適用し得る。Poisson過程は，その発生までの時間，すなわち到着時間（arrival time）がPoisson分布にしたがう一定もしくは不確定な規模のジャンプをともなう過程である[6)]。いま，このジャンプをもたらす事態を事件（event）と呼んでおこう。無限小の時間間隔dtの間に事件が発生するまでの到着率の平均値をλとすれば，そのときの事件発生確率はλdtで表わされ，未発生確率は$1-\lambda dt$で表わされる。ここで，ジャンプの規模を振幅（amplitude）と呼ぶとき，振幅それ自体が確率変数となり得る。

いま，Poisson過程をqで表わし，ジャンプの振幅をuとすれば

$$dq=\begin{cases} u & \text{with probability} \quad \lambda dt \\ 0 & \text{with probability} \quad 1-\lambda dt \end{cases} \tag{27}$$

がしたがう。(図-**2**参照。)

ところで，ジャンプをともなう確率変数xに対する確率過程は，Poisson微分方程式

$$dx=f(x,t)dt+g(x,t)dq \tag{28}$$

で表わされる。$f(x,t)$, $g(x,t)$は，既知の函数である。

ここで，xとtの微分可能函数$H(x,t)$を想定すれば，Hの変化分は

$$\frac{dx}{x}=\alpha_x dt+\sigma_x dq$$

$$=\alpha_x dt+\begin{cases} u & \lambda dt \\ 0 & 1-\lambda dt \end{cases}$$

図-2

$$dH=\frac{\partial H}{\partial t}dt+\frac{\partial H}{\partial x}dx$$
$$=\frac{\partial H}{\partial t}dt+\frac{\partial H}{\partial x}[f(x,\ t)dt+g(x,\ t)dq] \tag{29}$$

で表わされる。このとき，上の連続的変化をともなう拡散過程の場合と異なり dx が$\sqrt{dt}$ に依存しないから[7]，dt よりも速くゼロに収束する。しかるに，$H(x,\ t)$は 2 通りの変化の経路をもつ。1 つは，x のドリフト項に対応する連続かつ確定的な変化である。もう 1 つは，Poisson 事件が発生する可能性にともなう変化であり，もし事件が発生すれば，振幅 u の下で $ug(x,\ t)$だけ変化し，それにともなって $H(x,\ t)$が変化する経路である。

いま，事件発生確率 λdt を想起すれば，第 2 の経路による変化の期待値は

$$E\left[\frac{\partial H}{\partial x}g(x,\ t)dq\right]=E_u[\lambda(H(x+ug(x,\ t),\ t)-H(x,\ t))]dt \tag{30}$$

で与えられる。ただし，期待値オペレータE_uは，ジャンプの振幅 u に関わる期待を表わす。したがって，微分 dH の期待値は

$$E[dH]=\left[\frac{\partial H}{\partial t}+f(x,\ t)\frac{\partial H}{\partial x}\right]dt$$
$$+E_u[\lambda(H(x+ug(x,\ t),\ t)-H(x,\ t))]dt \tag{31}$$

で表わされる。

いま，Brown 運動と Poisson 過程を結合すれば，x の新たな確率過程

$$dx=a(x,\ t)dt+b(x,\ t)dz+g(x,\ t)dq \tag{32}$$

を得る[8]。そこでの微分 dH の期待値は

$$E[dH]=\left[\frac{\partial H}{\partial t}+a(x,\ t)\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x,\ t)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right]dt$$
$$+E_u[\lambda(H(x+ug(x,\ t),\ t)-H(x,\ t))]dt \tag{33}$$

で与えられる。ここで，2 次項は，(32)式の過程の連続部分に起因する分散に対してのみ関わってくることに注意されたい。

さて，(28)式において，x を危険社債価格 P_R に比定しよう。事故が発生しない場合には，危険券面利子率 (risk-adjusted coupon rate) r_R が支払われ，事故発生時には，何ら利子支払いはなく，したがって，社債価格はゼロとなるものとすれば，(28)式から危険社債価格 P_R は，Poisson 過程

$$dP_R=r_RP_Rdt-P_Rdq \tag{34}$$

にしたがう。

最後に，安全社債は，安全券面利子率 (risk-free coupon rate) が支払われ，その価格 P_F は

$$dP_F = r_F P_F dt \tag{35}$$

にしたがう。

さて，消費者の普通株，危険社債，安全社債への投資量 $N_S(t), N_R(t), N_F(\mathrm{t})$ の予算額に占める割合をそれぞれ $w_S(t) = N_S(t)S(t)/W(t)$, $w_R(t) = N_R(t)P_R(t)/W(t)$, $w_F(t) = N_F(t)P_F(t)/W(t)$ で定義すれば，予算方程式

$$\begin{aligned} dW &= w_S\alpha_S W dt + w_S\sigma_S W dZ_S + w_F r_F W dt \\ &\quad + w_R r_R W dt - w_R W dq - C dt \\ &= [w_S(\alpha_S - r_F)W + w_R(r_R - r_F)W + r_F W - C]dt \\ &\quad + w_S\sigma_S W dZ_S - w_R W dq \end{aligned} \tag{36}$$

がしたがう。ただし，$w_F = 1 - w_S - w_R$ が利用された。

ここで，再び，T 期間の寿命をもつ消費者は，消費からの生涯効用の最大化を図るものとする。

直ちに，最適状態評価函数

$$J(W, P, t) = \max_{C,\, w_S,\, w_R} E_t\left[\int_t^T U(C(s), s)ds + B(W(T), T)\right] \tag{37}$$

が定義される。

前項における手続きを適用すれば，確率 Bellman 方程式

$$0 = \max_{C,\, w_S,\, w_R} \{U(C(t), t) + \frac{1}{dt}E_t dJ\} \tag{38}$$

がしたがう。ここで，右辺の $E_t dJ$ は

$$\begin{aligned} E_t dJ = [&J_t + J_W(w_S(\alpha_S - r_F)W + r_F W + w_R(r_R - r_F)W - C) \\ &+ \frac{1}{2}J_{WW}\sigma_S^2 w_S^2 W^2 + \lambda(J(w_R W, t) - J(W, t))]dt \end{aligned} \tag{39}$$

と展開される。したがって，上の Bellman 方程式は

$$\begin{aligned} 0 = \max_{C,\, w_S,\, w_R} \{&U(C^*, t) + J_t + J_W(w_S^*(\alpha_S - r_F)W - r_F W + w_R^*(r_R - r_F)W - C) \\ &+ \frac{1}{2}J_{WW}\sigma_S^2 w_S^{*2} W^2 + \lambda(J(w_R^* W, t) - J(W, t))\} \end{aligned} \tag{40}$$

と書き改められる。

ここで，右辺の最大化を実行すれば，最適な消費・ポートフォリオの組 (C^*, w_S^*, w_R^*) が満たすべきそれぞれの 1 階条件

$$U_C(C^*, t) - J_W(W, t) = 0 \tag{41}$$

$$J_W(W, t)(\alpha_S - r_F) + J_{WW}(W, t)\sigma_S^2 w_S^* W = 0 \tag{42}$$

$$J_W(W, t)(r_R - r_F) + \lambda J_W(w_R^* W, t) = 0 \tag{43}$$

がしたがう。(42), (43)式から

$$\frac{J_{WW}(W, t)\ \sigma_S^2 w_S^* W}{\alpha_S - r_F} = \frac{\lambda J_W(w_R^* W, t)}{r_R - r_F} \tag{44}$$

がしたがう。ここで，(42), (43)式は

$$r_R - r_F = (\alpha_S - r_F)\frac{\lambda J_W(w_R^* W, t)}{J_{WW}(W, t)\sigma_S^2 w_S^* W} \tag{45}$$

と書き改められる。(45)式は，利回り格差 (yield spread) を与える表現となる。危険社債が支払う危険利子率 r_R の決定の過程については，次節第2項で議論される筈である。

1）本項における最適消費・ポートフォリオ・ルールに関する分析手続きとして，例えば，Merton [12], Chow [3], Malliaris＝Brock [16] (Chap.4)等参照。

2）配当（dividend）は，キャピタル・ゲインに含まれていることに注意されたい。

3）Merton [12]（p.138）参照。

4）資産価格が幾何 Brown 運動にしたがうケースについて，閉形式解（closed-form solution）の解法と解の特性に関する議論として，Chow, *op. cit.*,(Section 7, pp.154–58) 参照。

5）例えば，Dixit＝Pindyck [6] (Chap.3)参照。

6）ジャンプをともなう Poisson 過程の議論として，例えば，Cox＝Ross [5]，Shreve＝Lehoczky＝Gavers [18]，Lehoczky＝Sethi＝Shreve [9] 等参照。

7）Wiener 過程において，その増分 dZ は，$dZ=\varepsilon_t\sqrt{dt}$ の形をとる。ただし，ε_t は，平均ゼロ，標準偏差＝1の系列無相関な確率変数である。

8） 拡散過程と Poisson 過程の結合過程の最新の展開について，Rogers [17] 参照。

第2節　最適生産決定・財務決定

1. 不確定株式価格

本節では，株式による自己資本調達と債務不履行の可能性をもつ危険社債による借入金調達を図る生産企業の生産決定と財務決定のあり方をみる。

本項では，予備的議論として，債務不履行の可能性のない安全社債と普通株によって資金調達を図る生産企業の生産決定と財務決定のあり方をみる。

いま，政府が生産企業の生産函数の要素となる不払い要素（unpaid factor）タイプの公共投入財 (public inputs) を供給するものとする。このとき，単一の産出物を生産する代表的企業（以下，単に「企業」と呼ぶ。）の生産函数は

$$Y=F(K,L,G) \tag{46}$$

で与えられる。ただし，Y は産出量，K,L はそれぞれ資本，労働の投入量で，$F_j>0, F_{jj}<0\ (j=K, L)$が仮定される。また，$G$ は公共投入財で，資本，労働に対して補完財要素($F_{jG}>0\,;j=K,\ L$)として作用するものとする。

ここで，生産物を価格尺度財とすれば，粗利潤（gross profit）Π は

$$\Pi=Y-wL \tag{47}$$

で表わされる。ただし，w は実質賃金率で時間を通じて一定であるものとする。粗利潤は，企業において，内部留保（retained earnings）RE，配当金（dividend）D，発行済社債 B に対する安全利子率 r による支払い rB，そして納税額 T へと配分される。すなわち

$$\Pi=rB+D+RE+T \tag{48}$$

がしたがう。

他方，資本増分 dK は，内部留保，新規社債発行額 dB，新規株式発行価額 SdE から構成される。ただし，S は株式の市場価格である。このとき

$$dK = REdt + SdE + dB \tag{49}$$

がしたがう。

ここで，上の(48)式を時間間隔 dt 当たりの変化分で表現すれば

$$\Pi dt = rBdt + Ddt + REdt + Tdt \tag{50}$$

がしたがう。(49), (50)式を用いて $REdt$ を消去すれば，財務制約式（financial constraint）

$$\Pi dt + SdE + dB = rBdt + Ddt + Tdt + dK \tag{51}$$

がしたがう。

ところで，企業の市場価値（value of the firm）V は，借入金と自己資本の和で定義されるから

$$V = B + SE \tag{52}$$

がしたがい，さらに，増分について

$$dV = dB + SdE + EdS \tag{53}$$

がしたがう。いま，(51)式の両辺に，EdS を加え，(53)式を考慮すれば

$$dV + \Pi dt = rBdt + Ddt + Tdt + dK + EdS \tag{54}$$

を得る。ここで，租税は粗利潤から社債への利子支払い費用分を減じた額に対して一定の税率 τ_p が適用される比例税の形をとるものとすると，

$$Tdt = \tau_p(\Pi dt - rBdt) \tag{55}$$

がしたがう。

さて，企業の純キャッシュ・フロー（net cash flow）$\nu(t)$ を税引き後の粗利潤から資本調達費用 I を減じた値

$$\nu(t) = (1-\tau_p)\Pi - I = (1-\tau_p)(F(K, L, G) - wL) - I \tag{56}$$

で定義しよう。さらに，配当率（dividend rate）$i = D/SE$ を定義し，$Idt = dK$ を考慮すれば，(54)式は

$$dV + \nu dt = r(1-\tau_p)Bdt + iSEdt + EdS \tag{57}$$

と書き改められる。ここで，負債・自己資本比率（debt-to-equity ratio）$\delta = B/SE$ を定義し，(57)式に適用すれば

$$dV + \nu dt = \{r(1-\tau_p)\frac{\delta}{1+\delta} + (i + \frac{dS}{S})\frac{1}{1+r}\}Vdt \tag{58}$$

がしたがう。

いま，株価 S が幾何 Brown 運動（geometric Brown motion）

$$dS = \alpha Sdt + \sigma SdZ \tag{59}$$

にしたがって変動するものとする。しかるに，前節で示唆したごとく，幾何 Brown 運動の下で，S は対数正規分布にしたがう。このとき，対数 $\log S$ について

$$d\log S = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dZ \tag{60}$$

がしたがう。Wiener 過程は，白色ノイズ，すなわち $E[dZ] = 0$ を満たすから，(60)式の期待値をとれば

$$E(d\log S)=E(\frac{dS}{S})=\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{61}$$

がしたがう。したがって，

$$E[dV]=\{r(1-\tau_p)\frac{\delta}{1+\delta}+(i+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{1}{1+\delta}\}Vdt-\nu dt \tag{62}$$

がしたがう。

いま，(62)式の右辺{　}内を

$$\theta^*(\delta, i, r, \alpha, \sigma)=(r(1-\tau_p)\frac{\delta}{1+\delta}+(i+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{1}{1+\delta} \tag{63}$$

と定義しよう。θ^*は時間の函数であるが，V,νから独立であり，さらに確率変数とならないから，(62)式は

$$E[V(t)]=e^{\int_0^t\theta^*(\tau)d\tau}\{V_0-\int_0^t e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}\nu(t)dt\} \tag{64}$$

と解くことができる。ここで，企業が将来にわたって存在可能であるものとし，$t\rightarrow 0$とすると

$$V_0=\int_0^\infty e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}\nu(t)dt \tag{65}$$

がしたがう。(64), (65)式は

$$E[V(t)]=e^{\int_0^t\theta^*(\tau)d\tau}\int_t^\infty e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}\nu(t)dt \tag{66}$$

を導く。いま，(66)式を初期時点$(t=0)$で評価すれば

$$V(0)=\int_0^\infty\{(1-\tau_p)(F(K, L, G)-wL)-dK\}e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}dt \tag{67}$$

がしたがう。(67)式は，将来にわたる純キャッシュ・フローの割引現在価値に他ならず，企業の目的函数を与える。

しかるに，純キャッシュ・フロー$\nu(t)$は生産決定(K, L)のみに依存する一方で，割引率θ^*は財務決定(δ, i)のみに依存する。このことは，企業の最適化問題が逐次的（sequential）なそれとなることを意味し，$V(0)$の最大化は，たとえば，まず，$\nu(t)$の最大化を図るべく生産決定を行ない，次いで，そこでの$\nu(t)$の値を所与として，$V(0)$の最大化を図るべく，θ^*の最小化をもたらす財務決定を行なうごとく，２段階最適化の手続が適用可能なそれとなる。

ところで，財政決定の目的函数θ^*は，Vとδの定義を想起し

$$\theta^*=r(1-\tau_p)\frac{B}{V}+(i+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{SE}{V} \tag{68}$$

と書き改めることができる。(68)式は，θ^*が負債資本（debt capital）と自己資本（equity capital）の資本費用の加重平均となっていることを示唆している。

さて，期待企業価値$E[V(t)]$の最大化，したがって初期値$V(0)$の最大化を図ることにする。$dK=Idt$なる関係を想起すれば，所与のθ^*に対して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dK(t)e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}dt&=\int_0^\infty[K(t)-K(0)]e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}dt\\&=-K(0)\end{aligned} \tag{69}$$

がしたがうから，安全利子率 r の下で

$$V(0)=K(0)+\int_0^\infty\{(1-\tau_p)(F(K,L,G)-wL)-rK\}e^{-\int_0^t\theta^*(s)ds}dt \tag{70}$$

がしたがう。

直ちに，労働投入，資本投入に関するそれぞれの1階条件

$$F_L(K,L,G)-w=0 \tag{71}$$

$$(1-\tau_p)F_K(K,L,G)-r=0 \tag{72}$$

がしたがう。(71)式は，労働の限界生産力の(実質)賃金との均等化，(72)式は，税引後の資本の限界生産力の安全利子率との均等化を要請している。

次に，財務決定の目的函数

$$\theta^*(\delta,i)=r(1-\tau_p)\frac{\delta}{1+\delta}+(i+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{1}{1+\delta} \tag{73}$$

を想起すれば

$$sgn\frac{\partial\theta^*}{\partial i}=\frac{1}{1+\delta}>0 \tag{74}$$

$$sgn\frac{\partial\theta^*}{\partial\delta}=sgn[r(1-\tau_p)-(i+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)]\gtrless 0 \tag{75}$$

がしたがう。(74),(75)式は，最適配当政策，最適資本構成が端点解（corner solution）をとることを示唆している。(74)式は，資本費用の最小化は，配当率の最小化であることを意味している。しかるに，配当率に関して法的に最低限度が設定される法的規制の適用が示唆される。

いま，法的最低負債・自己資本比率（legal minimum dividend rate）を $i=\bar{i}(\geq 0)$ と設定しよう。このとき，資本費用を最小化する最適負債・自己資本比率に関して2通りの場合が区分される。

まず，所与の $\bar{i}$ の下で

$$r(1-\tau_p)<\bar{i}+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{76}$$

$$\text{or}\quad \bar{i}>r(1-\tau_p)-\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{77}$$

がしたがうとき，$sgn(\partial\theta^*/\partial\delta)<0$となり，$\theta^*$の最小化は$\delta$の無限大化を意味するから，資本費用の全額負債調達 (all-bond financing) の方途が選択される。次に，逆の場合，すなわち

$$r(1-\tau_p)>\bar{i}+\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{78}$$

$$\text{or}\quad \bar{i}<r(1-\tau_p)-\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{79}$$

がしたがうとき，$sgn(\partial\theta^*/\partial\delta)>0$となり，$\theta^*$の最小化は$\delta$の最小化を意味し，資本費用の全額自己資本調達（all-equity financing）の方途が選択される。

最後に，政府は，連続的に均衡財政政策をとる，すなわち

$$Tdt=Gdt \tag{80}$$

がしたがうことが仮定される。

上の(74)式から明らかなごとく，$sgn(\partial\theta^*/\partial i)$ は正の符号をとる。このことは，$sgn(\partial\theta^*/\partial i)=0$と

なり，配当政策が無関係となることを主張する Modigliani＝Miller 命題（Modigliani＝Miller proposition）が妥当しないことを帰結する[9]。

2. 債務不履行危険と財務決定

本項では，代表的企業が発行する社債が，安全利子率を支払う安全社債と債務不履行が発生し得る危険社債とから成るところでの危険社債の市場価値のあり方をみる。

前項の議論において，生産企業が自らの企業価値の期待値の最大化を図るべく生産決定，財務決定を行う際に，安全利子率を支払い続ける安全社債の市場価格ないし市場価値を陽表的に扱ってこなかった。

さらに，前項において，生産企業による企業価値の期待値の最大化の問題が，生産決定と独立に財務決定を行い得る逐次性（sequentiality）と，所与の生産決定の下での財務決定がそこでの資本費用の最小化に帰着する端点解をとる特殊性とが示唆された。

以下では，高めに設定された法定負債･自己資本比率 $\bar{i}$ に直面する企業が負債調達(debt financing) の方途を選択し，社債への支払い利子費用分を株式の新規発行で賄う財務戦略をとるものと想定しよう。

いま，改めて，生産企業の生産決定後の企業価値が幾何 Brown 運動

$$\frac{dV}{V}=\mu dt+\sigma dZ \tag{81}$$

にしたがい変動するものと想定し直そう。ただし，μは単位時間当たりの瞬時的企業期待収益率，σ^2は収益率の瞬時的分散，そして，dZ は Wiener 過程の増分である。

さて，社債は，一定の安全利子率 r を支払い続ける安全社債に加えて，債務不履行の可能性をもつ危険社債が存在し，危険社債は企業が履行可能（solvent）である間は，時間当たり定額 C の利子の連続的支払いを約するものとする。

いま,かかる危険社債の価値が企業価値と時間の関数であり,任意の時点において，$X=F(V,t)$で表わされるものとする。このとき，危険社債の価値は，確率微分方程式

$$dX=(\mu_X X-C)dt+\sigma_X X dZ_X \tag{82}$$

にしたがって変動するものとする。ただし，μ_X は単位時間当たりの瞬時的期待収益率，C は単位時間当たりの利払い額，$\sigma_X{}^2$は収益率の瞬時的分散，そして dZ_X は Wiener 過程の増分である。

さて，危険社債の価値 $X=F(V,t)$に伊藤補題を適用し，企業価値の変動過程（(81)式）を考慮すれば

$$\begin{aligned} dX&=F_V dV+\frac{1}{2}F_{VV}(dV)^2+F_t \\ &=[\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV}+\mu VF_V+F_t]dt+\sigma VF_V dZ+C \end{aligned} \tag{83}$$

がしたがう。しかるに，(83)式は，上の(82)式の複製過程（replication process）に他ならないから

$$\mu_X X=\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV}+\mu VF_V+F_t+C \tag{84}$$

$$\sigma_X X=\sigma VF_V \tag{85}$$

$$dZ_X = dZ \tag{86}$$

がしたがう。(86)式は，V と X が完全相関関係（perfectly correlated）にあることを示唆している。

ここで，企業（価値），危険社債，そして安全社債の3種の証券に対して総投資額がゼロとなるようなポートフォリオを組むものとする[10)]。このとき，企業，危険社債，安全社債に対する投資額をそれぞれ W_1, W_2, W_3 とする。ただし，$W_3 \equiv -[W_1 + W_2]$ がしたがう。直ちに，瞬時的ポートフォリオ収益 dQ

$$\begin{aligned} dQ &= W_1 \frac{dV}{V} + W_2 \frac{(dX + CdX)}{X} + W_3 r dt \\ &= [W_1(\mu - r) + W_2(\mu_X - r)]dt + W_1 \sigma dZ + W_2 \sigma_X dZ_X \\ &= [W_1(\mu - r) + W_2(\mu_X - r)]dt + [W_1 \sigma + W_2 \sigma_X] dZ \end{aligned} \tag{87}$$

を得る。いま，$dZ = dZ_X$ の係数が常にゼロとなるように選択されたポートフォリオ戦略を $W_j = W_j^*$ とすれば，W_j^* の下でのポートフォリオ収益 dX^* は，もはや確率変数ではなくなる。

しかるに，総投資額ゼロの想定の下で，ポートフォリオは，もはや裁定利得をもたらさないゼロ裁定条件（no arbitrage condition）

$$W_1^*(\mu - r) + W_2^*(\mu_X - r) = 0 \tag{88}$$

と，ゼロ危険条件（no risk condition）

$$W_1^* \sigma + W_2^* \sigma_X = 0 \tag{89}$$

が満たされなければならない。(88), (89)式は

$$\left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) = \left(\frac{\mu_X - r}{\sigma_X} \right) \tag{90}$$

がしたがうときに限り，解$(W_j^*(\neq 0))$をもつ。

ここで，(84), (85)式にμ_X, σ_X を代入すれば，(90)式は

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = [\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \mu V F_V - rF + F_t + C]/\sigma V F_V \tag{91}$$

と書き改められ，さらに，(91)式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + rVF_V - rF + F_t + C = 0 \tag{92}$$

と表現し直される[11)]。

上の(92)式は，偏微分方程式（partial differential equation）となり，2つの境界条件が満たされて初めて閉形式解（closed-form solutions）をもつことになる。そこでの境界条件の1つ目は，社債の満期時の支払額，2つ目は，社債の満期以前に破産（bankruptcy）が宣告された場合の破産時の支払い額によって決定づけられるそれである。

しかるに，社債価値が直接的時間依存性をもたない，すなわち $Ft(V, t) = 0$ がしたがうならば，(92)式は，常微分方程式（ordinary differential equation）

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + rVF_V(V) - rF(V) + C = 0 \tag{93}$$

に帰着する。ここで，(93)式の一般解として

$$F(V) = A_0 + A_1 V + A_2 V^{-\beta}, \text{ where } \quad \beta = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{94}$$

を試みてみよう。定数A_0, A_1, A_2は，境界条件とともに決定されてくることは，上で示唆したごとくである。

ここで，特定化が施された境界条件をもつ危険社債の具体例を想定し，そこでの解の特性をみてみよう[12]。

いま，それ以下の水準に陥るとき破産（bankruptcy）が宣言される引き金値としての破産価値（bankruptcy value）V_Bが存在するものとする。破産時$(V \leq V_B)$には，企業はθV_B $(0 \leq \theta \leq 1)$だけの破産費用（bankruptcy cost）の負担を強いられ，社債保有者には，その残額$(1-\theta)V_B$が支払われるにすぎず，株式保有者には，何も支払われないものとする。対比のために，かかる危険社債の価値を$D(V)$で表わすことにする。

まず，破産価値V_Bが固定されているものとしよう。このとき，社債価値は(89)式の形をとるから定数A_0, A_1，そしてA_2の決定がなされなければならない。ここで２つの境界条件の適用が示唆される。１つは，破産時の境界条件である。破産時には，$V=V_B$となり，社債保有者のみが$(1-\theta)V_B$だけの支払いを受けるから

$$D(V)=(1-\theta)V_B, \ \text{at } V=V_B \tag{95}$$

がしたがい，(95)式は，破産時境界条件を与える。もう１つは，一種の横断面条件である。Vが大きくなるにつれ破産自体が無関係なものとなっていき，危険社債価値が安全社債価値に接近していく，すなわち

$$\lim_{V \to \infty} D(V)=\int_0^\infty Ce^{-rt}dt=\frac{C}{r} \tag{96}$$

がしたがい，(96)式は横断面境界条件を与える。

いま，境界条件(96)式を適用すれば，(94)式において，$A_1=0$が直ちにしたがい，また，$V \to \infty$につれて，$V^{-\beta} \to 0$となり，$A_0=C/r$がしたがう。さらに，境界条件(95)式を適用すれば

$$F(V_B)=(1-\theta)V_B=\frac{C}{r}+A_2 V_B^{-\beta} \tag{97}$$

$$\text{or} \quad A_2=\left[(1-\theta)V_B-\frac{C}{r}\right]V_B^{\beta} \tag{98}$$

がしたがう。したがって，

$$\begin{aligned} D(V)&=\frac{C}{r}+\left[\left((1-\theta)V_B-\frac{C}{r}\right)V_B^{\beta}\right]V^{-\beta} \\ &=\frac{C}{r}+\left[(1-\theta)V_B-\frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta} \end{aligned} \tag{99}$$

を得る。しかるに，$P_B \equiv (V/V_B)^{-\beta}$と設定するとき，$P_B$は

$$P_B=\int_0^\infty f(V, V_B, t)e^{-rt}dt \tag{100}$$

を意味する。ただし，$f(V, V_B, t)$は，VがV_Bまで最初に低下する経過時間，すなわち，それ自体確率変数である破産までの到着時間に関する密度函数であり，したがって，P_Bは，将来時点での破産に条件付きで支払われる貨幣１単位の限界価値を表わしている[13]。

ところで，上の議論において，破産価値V_Bは固定され，したがって破産費用θV_Bも固定されていた。しかるに，一般に財務収益に対する課税と破産費用のあり方は，企業価値に変化を与え得る。破産費用の存在は，企業価値を低下させるべく作用し，課税の存在は，利子支払い費用分が租税控除（tax deduction）の対象となり企業価値を上昇させるべく作用するごとくである。そこでの上下

動効果の度合いは，企業価値水準に依存し，時間独立となる。

さて，租税控除効果と破産費用効果の相反する作用が働くところでの内生的破産価値の決定のあり方をみてみよう[14)]。

まず，破産時$(V=V_B)$において，破産費用θV_Bに等しい価値をもつが利子のつかない，すなわち$C=0$を満たす無利子社債（no coupon bond）を想定し，その価値を$B(V)$で表わせば，直ちに，境界条件

$$B(V)=\theta V_B,\ \text{at } V=V_B \tag{101}$$

$$\lim_{V\to\infty} B(V)=0 \tag{102}$$

がしたがう。このとき，(89)式から，解

$$B(V)=\theta V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta} \tag{103}$$

がしたがう。$B(V)$は，Vの逓減的凸函数$(B'(V)<0, B''(V)>0)$となる。

次に，税率ξの下で，租税控除にともなう便益（tax benefit）はξCとなり，その値は社債価値$T(V)$を構成する。直ちに，境界条件

$$T(V)=0,\ \text{at } V=V_B \tag{104}$$

$$\lim_{V\to\infty} T(V)=\xi\frac{C}{r} \tag{105}$$

がしたがう。(94)式は，破産が控除便益の喪失を意味することを，(105)式は，$V\to\infty$につれ破産の現実味がうすれ控除便益がξCに近づくことを示唆している。このとき，(89)式から，解

$$T(V)=\frac{\xi C}{r}-\frac{\xi C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta} \tag{106}$$

がしたがう。(106)式から，$T(V)$は，Vの逓減的凹函数$(T'(V)>0, T''(V)<0)$となる。

このとき，控除便益からの正の効果と破産費用からの負の効果とを考慮した正味の総企業価値$v(V)$は

$$\begin{aligned} v(V)&=V+T(V)-B(V)\\ &=V+\xi\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta}\right]-\theta V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta} \end{aligned} \tag{107}$$

で表わされる。$v(V)$は，Vに関する逓減的凹函数$(v'(V)>0, v''(V)<0)$となる。$V\to V_B$につれて$v(V)<V$となり，$V\to\infty$につれて$v(V)>V$となる。(図-**3**参照。)

最後に，株式価値$E(V)$が，定義から

$$E(V)=v(V)-D(V) \tag{108}$$

$$=V-(1-\xi)\frac{C}{r}-\left[(1-\xi)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-\beta} \tag{109}$$

がしたがう。

さて，財務制限条項による制限が別途課せられることがない限り，破産は，新規株式発行によって社債利子支払い要件を満たし得ないところで，株式価値がゼロ水準まで降下したとき発生することになる。しかるに，破産価値はそれがいかなる水準にあっても，そこでの株式価値がゼロとなることを意味している。

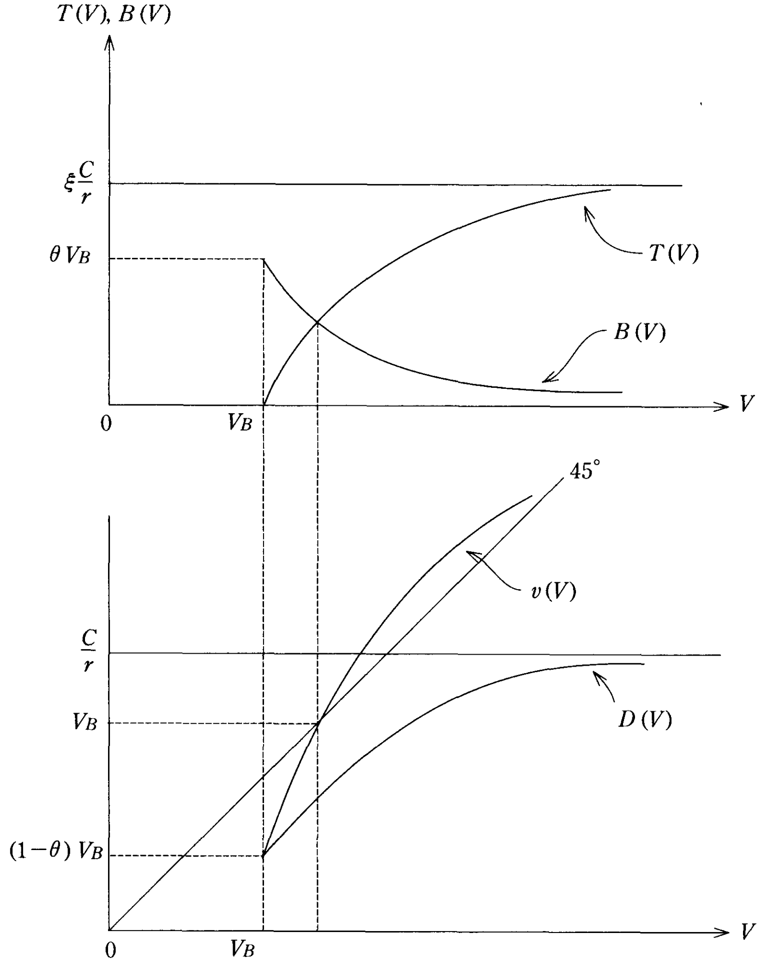

図-3

上でみたごとく，企業の総企業価値が所定の破産価値 V_B の下で，その値に応じた租税控除効果，破産価値効果の相反する作用を受ける。このとき，破産価値の決定が企業の権限の中にあるならば，企業は自らにとって最も好都合な水準を選択する誘因をもつことになる。

いま，企業が総企業価値を最大化すべく破産価値を選択する意思をもつものとすると，(102)式から明らかなごとく，その目的は破産価値を可能な限り低く抑えることによって実現される。しかるに，株式の有限責任制の下で，破産価値は，$V \geq V_B$ なるすべての V に対して $E(V) \geq 0$ となることが要件とされる。(109)式において，$[(1-\xi)C/r-V_B]>0$ が満たされるところで，$E(V) \geq 0$ が満たされ，さらに $E''(V)>0$ となり，$E(V)$ は V の凸函数となる。このとき

$$\frac{dE}{dV}\Big|_{V=V_B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE}{dV_B}=0 \tag{110}$$

がしたがう[15)]。(110)式の関係を満たす V_B は総企業価値の最大化をもたらすことになり，$\beta=2r/\sigma^2$ を想起すれば

$$V_B=\left((1-\xi)\frac{C}{r}\right)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)=(1-\xi)C\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right) \tag{111}$$

がしたがう。

(111)式を満たす破産の引き金となる破産価値 V_B は，税率 ξ，安全利子率 r，そして企業の変動性 σ^2 の上昇とともに減少し，社債利子支払い額 C とは比例関係をもち，現行の企業価値 V，破産費用 θ から独立であることが帰結される。

(106)式で与えられた破産価値で $D(V)$ を評価すれば

$$D(V)=\left(\frac{C}{r}\right)\left\{1-\left(\frac{C}{V}\right)^{\beta}[1+\beta-(1-\theta)(1-\xi)\beta][(1-\xi)\beta/r(1+\beta)]^{\beta}/(1+\beta)\right\} \tag{112}$$

を得る。このとき，$C/D(V)$ は危険社債が支払う利子率に他ならず，これを $R(C/V)$ で表わせば

$$R(C/V)=C/D(V)=rK(C/V) \tag{113}$$

がしたがう。ただし，$K(C/V)\equiv\{1-(C/V)^{\beta}[1+\beta-(1-\theta)(1-\xi)\beta][(1-\xi)\beta/r(1+\beta)]^{\beta}/(1+\beta)\}^{-1}$ である。したがって，$K(C/V)$ は，安全利子率 r に対し乗法的に作用する危険調整要因(risk-adjustment factor) とみなすことができる。このとき，利回り格差 (yield spread) $R(C/V)-r$ は

$$R(C/V)-r=\frac{r(C/V)^{\beta}\eta}{[1-(C/V)^{\beta}\eta]} \tag{114}$$

で表わされる。ただし，$\eta\equiv[1+\beta-(1-\theta)(1-\xi)\beta][(1-\xi)\beta/r(1+\beta)]^{\beta}/(1+\beta)$ である。

9) もし，消費者，企業そして政府から成る均衡体系において，消費者のポートフォリオ決定が満たすべき最適化条件が企業のそれの制約として作用するところで，i は相殺され，配当政策は無関係となり，Modigliani＝Miller 命題が復活し得る。例えば，消費者に対する課税が存在しない上の経済の完全予見均衡 (perfect foresight equilibrium) において，i は相殺され Modighiani＝Miller 命題の成立が回復される。例えば，Turnovsky [19] (Chap.10) 参照。

10) かかる工夫は，Merton [14] に負う。

11) かかる偏微分方程式の導出例として，Black＝Cox [1], Merton [14] 等参照。

12) 以下の分析手続きは，Leland [10], Leland＝Toft [11] に負う。

13) Leland *op. cit.*, footnote 16 (p.219) 参照。

14) Leland＝Toft, *op. cit.*, 参照。

15) (110)式の関係において，左の表現は，変数 V に関する微係数を境界点 $V=V_B$ において評価するとき解の決定のために満たされるべき条件で，平滑張合せ条件 (smooth pasting condition) と呼ばれる。2つの函数の値および微係数が境界上で符合しなければならないことを要請している。例えば，Dumas [8], Dixit＝Rob [7] 参照。

さらに左右の表現の同値性 (equivalence) について，Merton [13] footnote 60 (p.171) 参照。

結びにかえて

Modigliani＝Miller が先駆となった伝統的資本構成論において，租税がその最適構成化のための重要な決定要因を成している。レバレッジが高まると，一方で，負債の租税控除便益の増加，他方で破産費用の増加というプラス･マイナス相反する効果が作用する。企業の破産宣告の引き金値を

成す破産価値の水準の決定権が企業自らの手元にあるならば，企業の最適資本構成，したがって最適財務決定は，上の相反する効果をも衡量した正味の総企業価値を最大化すべく破産価格を決定するそれとなる。

上の内生的破産価値決定の手続きを経て導かれた最適破産価値は，企業の現行価値，破産費用から独立で，税率，安全利子率そして企業の危険性（volatility）の上昇とともに低下し，社債利子支払い額とは比例関係に立つ。さらに，最適破産価値の下での危険社債が支払う危険利子率が導かれ，したがって，それと安全利子率の差である利回り格差が顕示される。

消費者・投資家は，生涯効用を最大化するべく株式，安全社債，そして危険社債の間のポートフォリオを所与の利回り格差に合致させるように調整を図る主体であった。企業の最適財務決定の過程で顕示される利回り格差こそが，最適消費・ポートフォリオの決定に際して消費者・投資家が直面する利回り格差であることは言うまでもない。

さらに，企業の危険性の上昇化は，一方で，破産価値の低下を招き，他方で，破産回避的企業の生産水準，雇用水準縮少化を招く。企業にとって，破産は日常事の様相すら帯び，企業の危険性が想定外の規模に上昇したとき，経済は一気に崩壊に向かうことになる。

我々の上の議論に情報過程（filtration）を導入することは，興味深い発展化の方向であろう。

References

［1］ F. Black and J. C. Cox, "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions," *Journal of Finance*, 31, 1976.

［2］ _______ and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 1973.

［3］ G. C. Chow, "Optimum Control of Stochastic Differential Equations Systems," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1, 1979.

［4］ P. H. Cootner ed., *The Random Character of Stock Market Prices*, M.I.T. Press, 1964.

［5］ J. C. Cox and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3, 1976.

［6］ A. K. Dixit and R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

［7］ _______ and R. Rob, "Switching Costs and Sectoral Adjustments in General Equilibrium with Uninsured Risk," *Journal of Economic Theory*, 62, 1994.

［8］ B. Dumas, "Super Contact and Related Optimality Conditions," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 1991.

［9］ J. P. Lehoczky, S. Sethi and S. E. Shreve, "Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumption Constraints and Bankruptcy," *Mathematics of Operations Research*, 8, 1983.

［10］ H. E. Leland, "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure," *Journal of Finance*, 49, 1994.

［11］ _______ and K. B. Toft, "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads," *Journal of Finance*, 51, 1996.

［12］ R. C. Merton, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, 3, 1971.

［13］ _______, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1973.

［14］ _______, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 1974.

［15］ _______, "On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models, in W. Sharpe and C.

Cootner eds., *Financial Economics : Essays in Honor of Paul Cootner*, Prentice-Hall, 1982.

[16] A. G. Malliaris and W. A. Brock, *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland, 1982.

[17] L. C. G. Rogers, "Modeling Credit Risk," in R. Cont, ed., *Frontiers in Quantitative Finance: Volatility and Credit Risk Modeling*, John Wiley & Sons, 2009.

[18] S. E. Shreve, J. P. Lehoczky and D. P. Gavers, "Optimal Consumption for General Diffusions with Absorbing and Reflecting Barriers," *SIAM Journal of Control and Optimization*, 22, 1984.

[19] S. J. Turnovsky, *Methods of Macroeconomic Dynamics*, M.I.T. Press, 1995.